Université Paul Sabatier
Licence de Physique - 2ème année

Seconde session
30 juin 2015

Mécanique des Solides

Durée 1h30

Aucun document n'est autorisé

Chute d'une tartine beurrée

Une des variantes de la loi de Murphy s'énonce ainsi : "Une tartine beurrée posée sur le bord d'une table tombe immanquablement du côté beurre". Cet exercice propose d'examiner scientifiquement cet enquiquinant problème de la vie matinale. Dans un premier temps (questions 1-6), on étudie le mouvement de la tartine en contact avec le rebord de la table, puis (questions 7-10) on étudie son mouvement de chute libre.

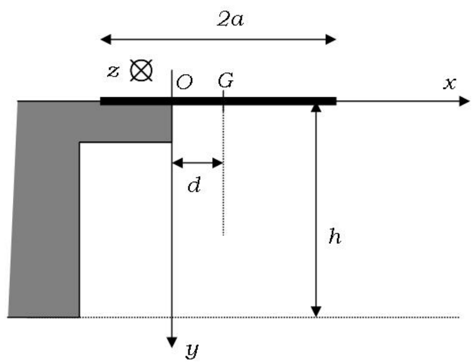

figure 1

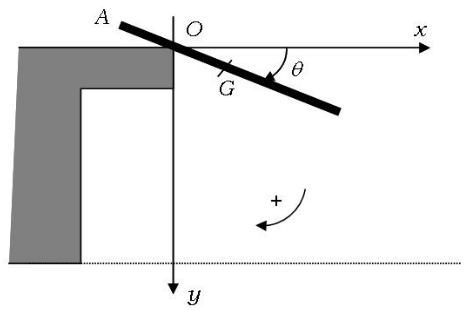

figure 2

Une tartine beurrée est modélisée par une plaque homogène d'épaisseur négligeable, de longueur $2a$ et de largeur $2b < 2a$. On note m la masse de la tartine et G son centre de masse.
Initialement, la tartine repose horizontalement sur la table (les petits côtés le long de l'arête), comme indiqué sur la figure 1. Le dessus de la table se situe à une hauteur h du sol. Le centre d'inertie G de la tartine se trouve à une distance de surplomb d par rapport au bord de la table.
Le mouvement de la tartine est étudié dans le repère cartésien (O, x, y, z) du référentiel terrestre $\mathcal{R}$ où (Ox) est l'axe horizontal, (Oy) est l'axe vertical *descendant* et (Oz) complète le trièdre. Dans ce cas, le sens positif de rotation est celui des aiguilles d'une montre.
La tartine amorce une rotation autour de l'arête (Oz) sans vitesse initiale, et on définit la position de la tartine par l'angle θ qu'elle fait avec l'axe horizontal (cf. figure 2). On supposera que la rotation s'effectue *sans glissement* en O.
On donne le moment d'inertie de la tartine par rapport à l'axe (Gz) : $I_{Gz} = \frac{1}{3}ma^2$.

1) On note $\vec{R}$ la réaction de la table sur la tartine. Écrire le théorème de la quantité de mouvement appliqué à la tartine (la relation vectorielle suffit).

2) Calculer le moment cinétique de la tartine dans le référentiel terrestre $\mathcal{R}$ par rapport au point O en fonction de m, a, d et $\dot{\theta}$.

3) En utilisant un des théorèmes généraux que l'on nommera, montrer que l'angle θ satisfait l'équation différentielle :

$$\ddot{\theta} = \frac{3gd}{a^2 + 3d^2} \cos\theta \qquad (1)$$

4) Après avoir multiplié l'équation (1) par $\dot{\theta}$, l'intégrer pour obtenir une relation entre $\dot{\theta}$ et $\sin\theta$.

5) Retrouver la relation de la question précédente par une méthode énergétique. Pour cela, évaluer l'énergie cinétique de la tartine puis son énergie potentielle de pesanteur.

6) On note A l'extrémité supérieure de la tartine. Déterminer les vitesses des points G et A lorsque $\theta = \pi/2$. On rappelle que la tartine ne glisse pas sur l'arête (Oz).

7) Une fois la tartine verticale ($\theta = \pi/2$), celle-ci quitte le rebord de la table. Elle n'est alors soumise qu'à la pesanteur. Que peut-on dire de l'évolution du moment cinétique de la tartine par rapport au point G ? En déduire la loi horaire suivante, où l'instant $t = 0$ correspond au décollement de la tartine :

$$\theta(t) = \frac{\pi}{2} + \sqrt{\frac{6gd}{a^2 + 3d^2}}\, t \tag{2}$$

8) La table utilisée a une hauteur $h = 70$ cm. On prend une tartine de longueur $2a$=10 cm qui surplombe la table de $d = 1$ mm (on pourra donc tirer parti du fait que $d \ll a$). Pour simplifier les calculs, on suppose que la tartine atteint le sol pratiquement à l'horizontale. Montrer que la durée de la chute s'écrit alors :

$$\tau = \sqrt{\frac{2(h-d)}{g}} \approx \sqrt{\frac{2h}{g}} \tag{3}$$

Faire l'application numérique avec $g = 9,8$ m.s^{-2}. Pensez-vous pouvoir rattraper la tartine au vol ?

9) Calculer l'angle dont a tourné la tartine lorsqu'elle atteint le sol. Murphy a-t-il raison ?

10) Toutes choses étant égales par ailleurs, quelle doit être la plus petite hauteur h_m de la table pour que la tartine retombe à l'horizontale, mais du côté pain ? Conclusion.

11) Si on note R_N et R_T les composantes respectivement normales et tangentielles de la réaction de la table $\vec{R}$ sur la tartine avec R_N (R_T) perpendiculaire (parallèle) à la tartine. Quelle condition doit verifier R_N et R_T pour qu'il n'y ait pas glissement en O ?